Teste 3

Disciplina: Física Quântica II
Professores António Amorim, Luís Bento

11 de Dezembro de 2023

Número e Nome: ______________________________

Esta secção é reservada ao avaliador:

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	5	5	5	5	20
Score:					

Assinatura: ______________________________

- O exame tem a duração de 2h acrescidas de 1 h de tolerância, num total de 3h.
- Se for pedida uma justificação, esta deverá ser resumida e a sua avaliação corresponde tipicamente a metade da cotação.
- É expressamente proibido a utilização do telemóvel. O seu uso incorre na anulação imediata da prova.
- Pode utilizar o verso das folhas como rascunho.

- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- Função de onda $\psi(x, y, x; t)$
- $\langle \phi \,|\, \psi \rangle = \int \phi^* \psi \, dx\, dy\, dz$
- $||\psi||^2 = \int \psi^* \psi \, dx\, dy\, dz$
- Hermit. $\langle \phi \,|\, A\psi \rangle = \langle A\phi \,|\, \psi \rangle$

- $A\,|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,|\psi_\lambda\rangle$
- $|\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda \,|\psi_\lambda\rangle$
- $\rho(\lambda) = |\,\langle \psi_\lambda \,|\, \psi \rangle\,|^2 / \langle \psi \,|\, \psi \rangle$
- $\langle A \rangle = \int \psi(x)^* A \psi(x)\, dx$
- $\sigma_A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$
- $\sigma_x\, \sigma_p \geq \hbar/2$
- $\sigma_A\, \sigma_B \geq \frac{|\langle [A,B] \rangle|}{2}$
- $\sigma_E\, \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$

- De Broglie $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$
- $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
- $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$
- $\vec{p} = \hbar\vec{k}$
- $|\psi_{\vec{k}}\rangle = \mathcal{N} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$
- $H = \frac{p^2}{2m} + V(x,p)$
- $H\,\psi_E(\ldots) = E\,\psi_E(\ldots)$
- $i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$

- Caixa:
- $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_x}} \sin\left(n\pi \frac{x}{l_x}\right)$
- $E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml_x^2} \quad n = 1, \ldots$
- Osc. Har. $V(x) = c\,x^2/2$
- $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
- $h_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_1(x) = \frac{2x/l}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_2(x) = \frac{2(x/l)^2 - 1}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_3(x) = \frac{2(x/l)^3 - 3x/l}{(9\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $E_n = \frac{1+2n}{2}\hbar\omega \quad n = 0, \ldots$

- $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$
- $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$; $L_\pm = L_x \pm iL_y$
- $L_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m \quad m = -l \ldots l$
- $L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$
- $L_\pm Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\hbar Y_l^{m\pm 1}$
- $Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
- $rY_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z$
- $rY_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x \pm iy)$
- $r^2 Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2z^2 - x^2 - y^2)$
- $r^2 Y_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{5}{8\pi}} z(x \pm iy)$
- $r^2 Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,(x \pm iy)^2$

- $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$
  $y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$
  $z = r\cos(\theta)$
- $V(r) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r}$
- $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi)$
- $E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2 n^2} = -\frac{13.6eV}{n^2}$
- $R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$
- $R_{20} = \frac{2 - r/a_0}{2\sqrt{2a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$
- $R_{21} = \frac{r/a_0}{2\sqrt{6a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$
- $V_Y = -C_Y \frac{e^{-\frac{m_B c^2}{\hbar c} r}}{r}$ Yukawa
- $\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\,\langle [H, A] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle$
- $a^+\,|i\rangle = \sqrt{i+1}\,|i+1\rangle$

- $\hbar = 1.054571 \times 10^{-34}$ J.s
- $\hbar = 6.58120\ldots \times 10^{-16}$ eV.s
- $m_e = 9.109383\ldots \times 10^{-31}$ kg
- $c = 2.99792 \times 10^8$ m/s
- 1 eV$\approx 1.6 \times 10^{-19}$ J
- $m_e c^2 \approx 511 \times 10^3$ eV
- $e = 1.60217\ldots \times 10^{-19} C$

- $m_p c^2 = 938 \times 10^6$ eV
- $\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12}$ C^2/Jm
- $\hbar c = 197.327$ eV·nm
- $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\hbar c}{137.036}$
- $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 0.0529$ nm
- Å $= 10^{-10}$m ; Fm $= 10^{-15}$m
- $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = |a|\sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{a^3}{2}\sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty r^n e^{-\frac{r}{a}} dr = n! a^{n+1} \quad a > 0$
- 1 eV. nm = 1 MeV. Fm
- $E_\gamma = \hbar\omega$, $\omega = 2\pi f$ e $c = \lambda f$

Pergunta 1 (5 Valores)

Duas partículas idênticas de spin 1/2 encontram-se num potencial de oscilador harmónico a uma dimensão com frequência angular ω (segundo zz) . Considerando que as funções de spin ortonormadas são representadas por $\chi^1_\pm$ e $\chi^2_\pm$ para $s_z = \pm\frac{1}{2}$ escreva:

a) As funções de uma partícula a considerar, incluindo o spin, e a função própria, ou funções próprias, normada dos estados das duas partículas de energia total $E_0 = \hbar\omega$ em função de $h_i(z_1), h_j(z_2)$. Justifique.

b) As funções de uma partícula a considerar, incluindo o spin, e a função própria, ou funções próprias, normada dos estados das duas partículas de energia total $E_1 = 2\hbar\omega$ em função de $h_i(z_1), h_j(z_2)$. Justifique.

Resposta:

a) $\psi(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots$

$\psi(z_1, z_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b)$\psi(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots$

$\psi(z_1, z_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pergunta 2 (5 Valores)
Considere a densidade de partículas para duas partículas idênticas definida por,

$$n(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \left\{|\psi(\vec{r},\vec{r}')|^2 + |\psi(\vec{r}',\vec{r})|^2\right\}$$

para uma função de onda normalizada $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$.
a) Escreva a condição de normalização para $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ e a partir dela calcule a normalização associada a $\int d\vec{r}\, n(\vec{r})$.
b) Se a função de onda de partículas idênticas em $t=0$ for obtida a partir dos estados próprios de energia do átomo de hidrogénio como

$$\psi(r_1,\theta_1,\phi_1,r_2,\theta_2,\phi_2) = \mathcal{N} Y_0^0(\theta_1,\phi_1) Y_0^0(\theta_2,\phi_2) \left(R_{10}(r_1)R_{10}(r_2) + R_{20}(r_1)R_{10}(r_2) + R_{10}(r_1)R_{20}(r_2)\right)$$

, calcule a expressão final de $n(\vec{r})$ e determine a normalização $\mathcal{N}$. (Sugestão: Considere a integração em coordenadas esféricas $d^3\vec{r} = r^2\, dr\, d\Omega$ e as condições de ortogonalidade

$$\int dr\, r^2 R_{nl}(r) R_{n'l}(r) = \delta_{nn'} \quad).$$

c) Obtenha a função de onda em função de t e calcule a evolução no tempo da densidade de partículas, $n(\vec{r},t)$ para o estado da alínea b) considerando que a energia de cada estado R_{nl} é $\frac{E_n}{\hbar} = -\frac{2\times10^{16}}{n^2}$Hz
Resposta:
a) $\langle\psi|\psi\rangle = \ldots\ldots\ldots$; $\int d\vec{r}\, n(\vec{r}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
b) $n(\vec{r}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,
$\mathcal{N} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
c)$\psi(\vec{r},t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$n(\vec{r},t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Pergunta 3 (5 Valores)

Para uma partícula de spin 1/2 podemos formar base formada pelos vetores que diagonalizam S_z,

$$\begin{bmatrix} \chi_{+\frac{1}{2}} \\ \chi_{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

a) Assumindo que a expressão dos elementos de matriz de $L_\pm$ no formulário também é valida para o spin escreva a matriz de S_x nesta base.
b) A rotação do sistema em torno do eixo dos xx por um ângulo de $\alpha = \pi/3$ rad é realizada pelo operador

$$R(\alpha) = e^{-i\frac{S_x}{\hbar}\alpha}$$

Calcule a matriz de rotação para esse ângulo.(Sugestão: Calcule a matriz $M^{-1}S_xM$ com

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^{-1} = M^{t*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e note que, para qualquer matriz, $M^{-1}e^AM = e^{M^{-1}AM}$ e para uma matriz diagonal

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}$$

c) Suponha que os sistema está no estado $\chi_{+\frac{1}{2}}$ e que rodamos de acordo com b). Calcule o estado resultante da rotação em função de $\chi_{-\frac{1}{2}}$ e $\chi_{\frac{1}{2}}$.
Resposta:
a) $S_x =$ ....
b) $R(\pi/3) =$ ....
c) $R(\pi/3)\chi_{+\frac{1}{2}} =$ ....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Pergunta 4 (5 Valores)

Quando colocamos um eletrão num campo magnético externo $\vec{B}$, damos origem a uma contribuição para o Hamiltoneano de,

$$\Delta H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

com a relação geral entre o momento magnético $\vec{\mu}$ e o spin, $\vec{\mu} = g\frac{q}{2m}\vec{S}$ de onde resulta, no caso do eletrão com $g \approx 2$,

$$\Delta H = \frac{e}{m_e}\vec{S} \cdot \vec{B}$$

a) Tomando o campo magnético segundo o eixo dos zz $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ e as relações de comutação $[S_z, S_x] = i\hbar S_y$ e $[S_y, S_z] = i\hbar S_x$ bem como a equação geral de evolução dos valores médios (no formulário), calcule a equação para a derivada temporal do valor médio de S_x. Justifique.

b) Calcule a equação para a derivada temporal do valor médio de S_y. Justifique.

c) A partir das duas equações anteriores mostre que estes valores médios oscilam e determine a sua frequência angular ω em função de B_0.

Resposta:

a) $\frac{d\langle S_x \rangle}{dt} =$ ....

b) $\frac{d\langle S_y \rangle}{dt} =$ ....

c) $\frac{d^2\langle S_x \rangle}{dt^2} =$ .... com $\omega =$ ....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....