

Teste 2

Disciplina: Mecânica Quântica
Professores António Amorim, Jorge Sampaio, Edgar Cravo

20 de Novembro de 2023

Número e Nome: _____

Esta secção é reservada ao avaliador:

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	4	4	4	4	4	20
Score:						

Assinatura: _____

O exame tem a duração de 2h acrescidas de 1 h de tolerância, num total de 3h. Se for pedida uma justificação, esta deverá ser resumida e a sua avaliação corresponde tipicamente a metade da cotação.

É expressamente proibido a utilização do telemóvel. O seu uso incorre na anulação imediata da prova.

Pode utilizar o verso das folhas como rascunho.

<ul style="list-style-type: none"> • $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ • $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ • $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$ • Função de onda $\psi(x, y, x; t)$ • $\langle \phi \psi \rangle = \int \phi^* \psi dx dy dz$ • $\ \psi\ ^2 = \int \psi^* \psi dx dy dz$ • Hermit. $\langle \phi A\psi \rangle = \langle A\phi \psi \rangle$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $A \psi_\lambda\rangle = \lambda \psi_\lambda\rangle$ • $\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda \psi_\lambda\rangle$ • $\rho(\lambda) = \langle \psi_\lambda \psi \rangle ^2 / \langle \psi \psi \rangle$ • $\langle A \rangle = \int \psi(x)^* A \psi(x) dx$ • $\sigma_A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$ • $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ • $\sigma_A \sigma_B \geq \frac{ \langle [A, B] \rangle }{2}$ • $\sigma_E \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • De Broglie $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$ • $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ • $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ • $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ • $\psi_{\vec{k}}\rangle = \mathcal{N} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ • $H = \frac{p^2}{2m} + V(x, p)$ • $H \psi_E(\dots) = E \psi_E(\dots)$ • $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$
---	---	---

<ul style="list-style-type: none"> • Caixa: • $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right)$ • $E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} \quad n = 1, \dots$ • Osc. Har. $V(x) = cx^2/2$ • $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ • $h_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ • $h_1(x) = \frac{2x/l}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ • $h_2(x) = \frac{2(x/l)^2 - 1}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ • $h_3(x) = \frac{2(x/l)^3 - 3x/l}{(9\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ • $E_n = \frac{1+2n}{2} \hbar\omega \quad n = 0, \dots$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\vec{L} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$ • $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}; L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ • $L_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m \quad m = -l \dots l$ • $L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$ • $L_{\pm} Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)} \hbar Y_l^{m\pm 1}$ • $Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ • $rY_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z$ • $rY_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x \pm iy)$ • $r^2 Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2z^2 - x^2 - y^2)$ • $r^2 Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{5}{8\pi}} z(x \pm iy)$ • $r^2 Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (x \pm iy)^2$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$ $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$ $z = r \cos(\theta)$ • $V(r) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r}$ • $\psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$ • $E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2 n^2} = -\frac{13.6eV}{n^2}$ • $R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$ • $R_{20} = \frac{2-r/a_0}{2\sqrt{2a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$ • $R_{21} = \frac{r/a_0}{2\sqrt{6a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$ • $V_Y = -C_Y \frac{e^{-\frac{m_B c^2}{\hbar c} r}}{r}$ Yukawa • $\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle$ • $a^+ i\rangle = \sqrt{i+1} i+1\rangle$
--	---	--

<ul style="list-style-type: none"> • $\hbar = 1.054571 \times 10^{-34}$ J.s • $\hbar = 6.58120 \dots \times 10^{-16}$ eV.s • $m_e = 9.109383 \dots \times 10^{-31}$ kg • $c = 2.99792 \times 10^8$ m/s • $1 \text{ eV} \approx 1.6 \times 10^{-19}$ J • $m_e c^2 \approx 511 \times 10^3$ eV • $e = 1.60217 \dots \times 10^{-19}$ C 	<ul style="list-style-type: none"> • $m_p c^2 = 938 \times 10^6$ eV • $\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12}$ C²/Jm • $\hbar c = 197.327$ eV·nm • $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\hbar c}{137.036}$ • $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0.0529$ nm • $\text{Å} = 10^{-10}$ m ; Fm = 10^{-15} m • $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K 	<ul style="list-style-type: none"> • $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = a \sqrt{\pi}$ • $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = 0$ • $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{a^3}{2} \sqrt{\pi}$ • $\int_0^{\infty} r^n e^{-\frac{r}{a}} dr = n! a^{n+1} \quad a > 0$ • $1 \text{ eV} \cdot \text{nm} = 1 \text{ MeV} \cdot \text{Fm}$ • $E_\gamma = \hbar\omega, \omega = 2\pi f \text{ e } c = \lambda f$
--	---	--

Pergunta 1 (4 Valores)

Utilizando a definição $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, $p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$, calcule os comutadores $[p_x, p_y]$, $[x^2, p_x]$ e $[x^2, p_y]$. Como poderia escrever a desigualdade envolvendo $\sigma_{x^2} \sigma_{p_x}$ e $\sigma_{x^2} \sigma_{p_y}$ e valores médios de operadores? Justifique. (ver formulário para Eq. Heisenberg)

Resposta:

- a) $[p_x, p_y] = \dots\dots\dots [x^2, p_x] = \dots\dots\dots, [x^2, p_y] = \dots\dots\dots$
 b) $\sigma_{x^2} \sigma_{p_x} \geq \dots\dots\dots \sigma_{x^2} \sigma_{p_y} \geq \dots\dots\dots$

Solution: a) dado que $[x, p_x] = i\hbar$ então $x p_x = i\hbar + p_x x$ pelo que $[p_x, p_y] = 0$ $[x^2, p_x] = 2ix\hbar, [x^2, p_y] = 0$
 b) $\sigma_{x^2} \sigma_{p_x} \geq \frac{|[x^2, p_x]|}{2} = \hbar | \langle x \rangle | \sigma_{x^2} \sigma_{p_y} \geq 0$

.....

Pergunta 2 (4 Valores)

Num processo de colisão a secção eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ relaciona-se com a amplitude de dispersão $f(\theta, \phi)$ que, por sua vez, pode ser obtida pela aproximação de Born pela relação,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \approx \left| \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{\vec{r}'} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') d^3\vec{r}' \right|^2$$

onde $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$, a energia cinética de entrada e saída é dada por $E_c = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ e (θ, ϕ) definem a direção de \vec{k}_f relativamente a \vec{k}_i . Para um potencial central $V(r)$ a expressão da amplitude de Born pode escrever-se como,

$$f(\theta, \phi) = \frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^\infty \sin(qr)V(r)r dr$$

a) Calcule a amplitude de dispersão e a secção eficaz diferencial, na aproximação de Born, para o potencial,

$$V(r) = V_0 e^{-\alpha r}$$

Justifique. (sugestão: $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ e $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(bx) dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$)

b) Qual o resultado no limite de $\alpha \rightarrow 0$. Para α finito, calcule $|\vec{q}|^2$ e exprima $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ em função do ângulo θ e da energia E_c . Justifique.

Resposta:

a) $f(\theta) = \dots\dots\dots \frac{d\sigma}{d\Omega} = \dots\dots\dots$

b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \dots\dots\dots; |\vec{q}|^2 = \dots\dots\dots; \frac{d\sigma}{d\Omega} = \dots\dots\dots$

Solution: a) $f(\theta) = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \frac{2\alpha}{(\alpha^2+q^2)^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4^2 \mu^2 V_0^2}{\hbar^4} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+q^2)^4}$
 b) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = 0 \quad |\vec{q}|^2 = \frac{4\mu E}{\hbar^2} (1 - \cos \theta); \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4^2 \mu^2 V_0^2}{\hbar^4} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+q^2)^4} = \frac{4^2 \mu^2 V_0^2}{\hbar^4} \frac{\alpha^2}{\left(\alpha^2 + \frac{4\mu E}{\hbar^2} (1 - \cos \theta)\right)^4}$

.....

Pergunta 3 (4 Valores)

A secção eficaz diferencial de Coulomb para a dispersão de um eletrão por um núcleo de hidrogénio é dada pela fórmula de Rutherford,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

- a) Qual o valor desta secção eficaz em nm² para a dispersão de um feixe de eletrões com energia de 1 MeV por um alvo de hidrogénio para o ângulo de $\theta = 60$ graus? Justifique.
- b) Quantos eletrões por segundo seriam observados, para um feixe de luminosidade $\mathcal{L} = 10^{28} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ sobre um alvo com 100 partículas e num detetor com um ângulo sólido de 10^{-3} colocado a 60 graus da direção de incidência, considerando a expressão,

$$\frac{dN_e}{dt} = \mathcal{L} N \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

onde N é o número de partículas do alvo. Justifique.

Resposta:

- a) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \dots\dots\dots$
- b) $\frac{dN_e}{dt} = \dots\dots\dots$

Solution: a) como $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$ rad então $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}$ e $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E_c} \right)^2 = \left(\frac{\hbar c}{137 \times 2 E_c} \right)^2 \times 4 = \left(\frac{197}{137 \times 2 \times 10^6} \right)^2 \times 4 \text{nm}^2 = 20.7 \times 10^{-13} \text{nm}^2$

b) Como $\mathcal{L} = 10^{28} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} = 10^{28} (10^7 \text{nm})^{-2} \text{s}^{-1} = 10^{14} \text{nm}^{-2} \text{s}^{-1}$ então,

$$\frac{dN}{dt} = \mathcal{L} N \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 10^{14} \times 10^2 \times 10^{-3} \times 20.7 \times 10^{-13} \text{s}^{-1} = 20.7 \text{s}^{-1}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pergunta 4 (4 Valores)

Considere duas partículas de spin $1/2$ que orbitam uma em torno da outra, num estado ligado de paridade -1 e momento angular total $j = 2$. A paridade do harmónico esférico Y_l^m é $(-1)^l$. Na soma de dois momentos angulares/spins, $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ verifica-se $m = m_1 + m_2$ e $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$. Neste caso, quais as combinações de momento angular l, m de Y_l^m e os estados de soma dos spins $|s, m_s\rangle$ que podem fazer parte da função de onda do estado ligado, para os valores de $m_j \geq 0$? Justifique.

Resposta:

- a) para $m_j = 2$ temos $l, m, s, m_s = \dots\dots\dots$
(vários)
- b) para $m_j = 1$ temos $l, m, s, m_s = \dots\dots\dots$
(vários)
- c) para $m_j = 0$ temos $l, m, s, m_s = \dots\dots\dots$
(vários)

Solution: Para somar para $j=2$ com l ímpar e $s=0,1$ podemos ter:
 $s=1, l=1$
 $s=1, l=3$ ($2 \leq j < 4$)
 pelo que temos
 a) para $m_j = 2$ temos $l, m, s, m_s = 1, 1, 1, 1; 3, 1, 1, 1; 3, 2, 1, 0; 3, 3, 1, -1$
 b) para $m_j = 1$ temos $l, m, s, m_s = 1, 1, 1, 0; 1, 0, 1, 1; 3, 2, 1, -1; 3, 1, 1, 0; 3, 0, 1, 1$
 c) para $m_j = 0$ temos $l, m, s, m_s = 1, 1, 1, -1; 1, 0, 1, 0; 1, -1, 1, 1; 3, 1, 1, -1; 3, 0, 1, 0; 3, -1, 1, 1$

.....

Pergunta 5 (4 Valores)

Dado um sistema de uma partícula com uma função de onda $\psi(\vec{r}) = R(r) Y_2^{-2}(\theta, \phi)$, determine os valores médios dos operadores $\vec{L}^2, L_x^2, L_y^2, L_z^2, L_x, L_y, L_z$. Sugestão: utilize os elementos de matriz de L_{\pm} no formulário. Justifique.

Resposta:

$\langle \vec{L}^2 \rangle = \dots\dots\dots; \langle L_x^2 \rangle = \dots\dots\dots; \langle L_y^2 \rangle = \dots\dots\dots; \langle L_z^2 \rangle = \dots\dots\dots$
 $\langle L_x \rangle = \dots\dots\dots; \langle L_y \rangle = \dots\dots\dots; \langle L_z \rangle = \dots\dots\dots$

Solution: $\langle \vec{L}^2 \rangle = 6\hbar^2; \langle L_x^2 \rangle = \hbar^2; \langle L_y^2 \rangle = \hbar^2; \langle L_z^2 \rangle = 4\hbar^2$
 $\langle L_x \rangle = 0; \langle L_y \rangle = 0; \langle L_z \rangle = -2\hbar$

e sabemos que $L_x = (L_+ + L_-)/2$ e $L_y = (L_+ - L_-)/(2i)$ com $\langle L_+ \rangle = \langle L_- \rangle = 0$ e $L_- Y_2^{-2} = 0$ e $L_+ Y_2^{-2} = 2\hbar Y_2^{-1}$ bem como $L_- Y_2^{-1} = 2\hbar Y_2^{-2}$.

O termo que sobrevive para $\langle Y_2^{-2} | L_x^2 Y_2^{-2} \rangle = \frac{1}{4} \langle Y_2^{-2} | L_- L_+ Y_2^{-2} \rangle = \hbar^2$

e para $\langle Y_2^{-2} | L_y^2 Y_2^{-2} \rangle = \frac{1}{2i} \frac{(-1)}{2i} \langle Y_2^{-2} | L_- L_+ Y_2^{-2} \rangle = \hbar^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....