Teste 2

Disciplina: Física Quântica II
Professores António Amorim, Luís Bento

20 de Novembro de 2023

Número e Nome: ______________________________

Esta secção é reservada ao avaliador:

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	4	4	4	4	4	20
Score:						

Assinatura: ______________________________

O exame tem a duração de 2h acrescidas de 1 h de tolerância, num total de 3h. Se for pedida uma justificação, esta deverá ser resumida e a sua avaliação corresponde tipicamente a metade da cotação.

É expressamente proibido a utilização do telemóvel. O seu uso incorre na anulação imediata da prova.

Pode utilizar o verso das folhas como rascunho.

- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- Função de onda $\psi(x,y,x;t)$
- $\langle \phi \,|\, \psi \rangle = \int \phi^* \psi \, dx\, dy\, dz$
- $||\psi||^2 = \int \psi^* \psi \, dx\, dy\, dz$
- Hermit. $\langle \phi \,|\, A\psi \rangle = \langle A\phi \,|\, \psi \rangle$

- $A\,|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,|\psi_\lambda\rangle$
- $|\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda\,|\psi_\lambda\rangle$
- $\rho(\lambda) = |\,\langle \psi_\lambda \,|\, \psi \rangle\,|^2 / \langle \psi \,|\, \psi \rangle$
- $\langle A \rangle = \int \psi(x)^* A \psi(x)\, dx$
- $\sigma_A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$
- $\sigma_x\,\sigma_p \geq \hbar/2$
- $\sigma_A\,\sigma_B \geq \frac{|\langle [A,B] \rangle|}{2}$
- $\sigma_E\,\sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$

- De Broglie $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$
- $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
- $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$
- $\vec{p} = \hbar\vec{k}$
- $|\psi_{\vec{k}}\rangle = \mathcal{N} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$
- $H = \frac{p^2}{2m} + V(x,p)$
- $H\,\psi_E(\ldots) = E\,\psi_E(\ldots)$
- $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$

- Caixa:
- $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_x}} \sin\left(n\pi\frac{x}{l_x}\right)$
- $E_n = n^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml_x^2} \quad n = 1, \ldots$
- Osc. Har. $V(x) = c\,x^2/2$
- $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
- $h_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_1(x) = \frac{2x/l}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_2(x) = \frac{2(x/l)^2-1}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_3(x) = \frac{2(x/l)^3-3x/l}{(9\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $E_n = \frac{1+2n}{2}\hbar\omega \quad n = 0, \ldots$

- $\vec{L} = -i\hbar\vec{r}\times\vec{\nabla}$
- $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$; $L_\pm = L_x \pm iL_y$
- $L_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m \quad m = -l \ldots l$
- $L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$
- $L_\pm Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}\hbar Y_l^{m\pm1}$
- $Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
- $rY_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z$
- $rY_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x \pm iy)$
- $r^2 Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2z^2 - x^2 - y^2)$
- $r^2 Y_2^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{5}{8\pi}} z(x \pm iy)$
- $r^2 Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(x \pm iy)^2$

- $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$
  $y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$
  $z = r\cos(\theta)$
- $V(r) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r}$
- $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$
- $E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2 n^2} = -\frac{13.6eV}{n^2}$
- $R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$
- $R_{20} = \frac{2 - r/a_0}{2\sqrt{2a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$
- $R_{21} = \frac{r/a_0}{2\sqrt{6a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$
- $V_Y = -C_Y \frac{e^{-\frac{m_B c^2}{\hbar c} r}}{r}$ Yukawa
- $\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle [H,A] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle$
- $a^+\,|i\rangle = \sqrt{i+1}\,|i+1\rangle$

- $\hbar = 1.054571 \times 10^{-34}$ J.s
- $\hbar = 6.58120\ldots \times 10^{-16}$ eV.s
- $m_e = 9.109383\ldots \times 10^{-31}$ kg
- $c = 2.99792 \times 10^8$ m/s
- 1 eV$\approx 1.6 \times 10^{-19}$ J
- $m_e c^2 \approx 511 \times 10^3$ eV
- $e = 1.60217\ldots \times 10^{-19} C$

- $m_p c^2 = 938 \times 10^6$ eV
- $\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12}$ C^2/Jm
- $\hbar c = 197.327$ eV·nm
- $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\hbar c}{137.036}$
- $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 0.0529$ nm
- Å $= 10^{-10}$m ; Fm $= 10^{-15}$m
- $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = |a|\sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{a^3}{2}\sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty r^n e^{-\frac{r}{a}} dr = n! a^{n+1} \quad a > 0$
- 1 eV. nm = 1 MeV. Fm
- $E_\gamma = \hbar\omega$, $\omega = 2\pi f$ e $c = \lambda f$

Pergunta 1 (4 Valores)

Um deuterão está mergulhado no campo gravítico terrestre. Assuma que o potencial gravítico para cada partícula é dado por mgz.

a) Escreva o Hamiltoneano $H\psi$ do sistema em função das coordenadas do neutrão e do protão e suas derivadas, assumindo que, para além da interação gravítica, a interação entre estes é dada por $V_{NP}(\vec{r}_N - \vec{r}_P)$. Justifique.

b) Dado que $m_P c^2 = 938.3$ MeV e $m_N c^2 = 939.6$ MeV, qual o valor de μc^2, sendo μ a massa reduzida? Justifique.

c) Escreva esse Hamiltoneano separando as coordenadas do centro de massa, incluindo todos os termos do potencial. Justifique.

Resposta:

a) $H\psi(\vec{r}_N, \vec{r}_P) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\mu c^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$MeV

c) $H\psi(\vec{R}_{\text{CM}}, \vec{r}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Solution: a) $H\psi(\vec{r}_N, \vec{r}_P) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_N}\nabla^2_{r_N} - \frac{\hbar^2}{2m_N}\nabla^2_{r_p} + V_{NP}(\vec{r}_N - \vec{r}_P) + m_N g z_N + m_P g z_P\right]\psi$

b) $\mu c^2 = \frac{m_N m_P}{m_N + m_P}c^2 = \frac{m_N c^2 m_P c^2}{m_N c^2 + m_P c^2} = \frac{939.6\times 938.3}{939.6+938.3}$ =469.5MeV

c) $H\psi(\vec{R}_{\text{CM}}, \vec{r}) = \left[\frac{\hbar^2}{2(m_N + m_P)}\nabla^2_{R_{CM}} + (m_N + m_P)\, g z_{CM} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2_r + V_{NP}(\vec{r})\right]\psi$

....
....
....
....
....
....
....
....

Pergunta 2 (4 Valores)

Num processo de colisão elástica a secção eficaz diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ relaciona-se com a amplitude de dispersão $f(\theta, \phi)$ que, por sua vez, pode ser obtida pela aproximação de Born pela relação,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta,\phi)|^2 \approx \left| \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{\vec{r'}} e^{-i(\vec{k_f}-\vec{k}_i)\cdot\vec{r'}} V(\vec{r'})\, d^3\vec{r'} \right|^2$$

Para um potencial central $V(r)$ a expressão da amplitude de Born pode escrever-se como (momento $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$ e (θ, ϕ) definem a direção de $\vec{k}_f$ relativamente a $\vec{k}_i$),

$$f(\theta) = \frac{2\mu}{q\hbar^2} \int_0^\infty \sin(qr)V(r)r\, dr$$

a) Calcule a amplitude de dispersão e a secção eficaz diferencial para um potencial de Yukawa com a expressão,

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

Justifique. (sugestão: $\int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ e $\int_0^\infty x\, e^{-ax}\sin(bx)\, dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$)

b) Calcule a expressão de $|\vec{q}|^2$ em função do ângulo θ entre os feixes de saída e de entrada e da energia cinética, E_c, no referencial de centro de massa. Exprima o resultado da secção eficaz em função da partícula de interação com $\alpha = \frac{m_B c}{\hbar}$ e calcule as expressões finais no limite de $m_B \to 0$. Considere nesse limite $V_0 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$. Justifique.

Resposta:

a) $f(\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $|\vec{q}|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{d\sigma}{d\Omega} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ e $\lim_{m_B\to 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Solution: a) $f(\theta) = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2(\alpha^2+q^2)}$ $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 V_0^2}{\hbar^4(\alpha^2+q^2)^2}$

b)$|\vec{q}|^2 = \frac{4\mu E}{\hbar^2}(1-\cos\theta)$, $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 V_0^2}{\left(m_B^2 c^2 + 4\mu E_c(1-\cos\theta)\right)^2}$ e $\lim_{m_B\to 0}\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V_0^2}{4E_c^2(1-\cos\theta)^2} = \frac{e^4}{4^2\pi^2\epsilon_0^2 4E_c^2(1-\cos\theta)^2}$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Pergunta 3 (4 Valores)

A secção eficaz diferencial de Coulomb para a dispersão de um eletrão por um núcleo de hidrogénio é dada pela fórmula de Rutherford,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

a) Qual o valor desta secção eficaz em nm^2 para a dispersão de um feixe de eletrões com energia de 1 MeV por um alvo de hidrogénio para o ângulo de $\theta = 90$ graus? Justifique.
b) Quantos eletrões por segundo seriam observados, para um feixe de luminosidade

$$\mathcal{L} = 10^{28}\mathrm{cm}^{-2}s^{-1}$$

sobre um alvo com 100 partículas e num detetor com um ângulo sólido de 10^{-3} colocado a 90 graus da direção de incidência, considerando a expressão,

$$\frac{dN_e}{dt} = \mathcal{L}N\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

onde N é o número de partículas do alvo. Justifique.
Resposta:
a) $\frac{d\sigma}{d\Omega} =$ ....
b) $\frac{dN_e}{dt} =$ ....

Solution: a)como $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$rad então $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ e $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2E_c}\right)^2 = \left(\frac{\hbar c}{137\times 2E_c}\right)^2 = \left(\frac{197}{137\times 2\times 10^6}\right)^2 \mathrm{nm}^2 = 5.17\times 10^{-13}\mathrm{nm}^2$
b) Como $\mathcal{L} = 10^{28}\mathrm{cm}^{-2}s^{-1} = 10^{28}\left(10^7\mathrm{nm}\right)^{-2}s^{-1} = 10^{14}\mathrm{nm}^{-2}s^{-1}$ então,

$$\frac{dN}{dt} = \mathcal{L}N\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = 10^{14}\times 10^2\times 10^{-3}\times 5.17\times 10^{-13}s^{-1} = 5.17s^{-1}$$

....
....
....
....
....
....
....
....

Pergunta 4 (4 Valores)

Considere duas partículas de spin 1/2 que orbitam uma em torno da outra, num estado ligado de paridade +1 e momento angular total $j = 2$. A paridade do harmónico esférico Y_l^m é $(-1)^l$. Na soma de dois momentos angulares/spins, $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ verifica-se $m = m_1 + m_2$ e $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$. Neste caso, quais as combinações de momento angular l, m de Y_l^m e os estados de soma dos spins $|s, m_s\rangle$ que podem fazer parte da função de onda do estado ligado para os valores de $m_j \geq 0$? Justifique.

Resposta:

a) para $m_j = 2$ temos $l, m, s, m_s =$ ....
(vários)

b) para $m_j = 1$ temos $l, m, s, m_s =$ ....
(vários)

c) para $m_j = 0$ temos $l, m, s, m_s =$ ....
(vários)

Solution: Para somar para j=2 com l par e s=0,1 podemos ter:
s=0, l=2
s=1,l=2 (1<j<3) e não s=1,l=0 (1<j<1) nem s=1,l=4 (3<j<5)
pelo que temos
a) para $m_j = 2$ temos $l, m, s, m_s = 2, 2, 0, 0;\ 2, 2, 1, 0;\ 2, 1, 1, 1$
b) para $m_j = 1$ temos $l, m, s, m_s = 2, 1, 0, 0;\ 2, 2, 1, -1;\ 2, 1, 1, 0;\ 2, 0, 1, 1$
c) para $m_j = 0$ temos $l, m, s, m_s = 2, 0, 0, 0;\ 2, 1, 1, -1;\ 2, 0, 1, 0;\ 2, -1, 1, 1$

....
....
....
....
....
....
....
....

Pergunta 5 (4 Valores)

Dado um sistema de uma partícula com uma função de onda $\psi(\vec{r}) = R(r)\, Y_2^{+2}(\theta, \phi)$, determine os valores médios dos operadores $\vec{L}^2, L_x^2, L_y^2, L_z^2, L_x, L_y, L_z$. Sugestão: utilize os elementos de matriz de $L_\pm$ no formulário. Justifique.

Resposta:

$< \vec{L}^2 >=$ ....; $< L_x^2 >=$ ....; $< L_y^2 >=$ ....; $< L_z^2 >=$ ....
$< L_x >=$ ....; $< L_y >=$ ....; $< L_z >=$ ....

Solution: $< \vec{L}^2 >= 6\hbar^2; < L_x^2 >= \hbar^2; < L_y^2 >= \hbar^2; < L_z^2 >= 4\hbar^2$
$< L_x >= 0; < L_y >= 0; < L_z >= 2\hbar$

e sabemos que $L_x = (L_+ + L_-)/2$ e $L_y = (L_+ - L_-)/(2i)$ com $\langle L_+ \rangle = \langle L_- \rangle = 0$ e $L_+ Y_2^2 = 0$ e $L_- Y_2^2 = 2\hbar Y_2^1$ bem como $L_+ Y_2^1 = 2\hbar Y_2^2$.
O termo que sobrevive para $< Y_2^2 | L_x^2 Y_2^2 >= \frac{1}{4} < Y_2^2 | L_+ L_- Y_2^2 >= \hbar^2$
e para $< Y_2^2 | L_y^2 Y_2^2 >= \frac{1}{2i} \frac{(-1)}{2i} < Y_2^2 | L_+ L_- Y_2^2 >= \hbar^2$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .