# Formulário

- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- Função de onda $\psi(x, y, x; t)$
- $\langle \phi \,|\, \psi \rangle = \int \phi^* \psi \, dx\, dy\, dz$
- $||\psi||^2 = \int \psi^* \psi \, dx\, dy\, dz$
- Hermit. $\langle \phi \,|\, A\psi \rangle = \langle A\phi \,|\, \psi \rangle$

- $A\,|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,|\psi_\lambda\rangle$
- $|\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda \,|\psi_\lambda\rangle$
- $\rho(\lambda) = |\,\langle \psi_\lambda \,|\, \psi \rangle\,|^2 / \langle \psi \,|\, \psi \rangle$
- $\langle A \rangle = \int \psi(x)^* A \psi(x)\, dx$
- $\sigma_A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$
- $\sigma_x\, \sigma_p \geq \hbar/2$
- $\sigma_A\, \sigma_B \geq \frac{|\langle [A,B] \rangle|}{2}$
- $\sigma_E\, \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$

- De Broglie $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$
- $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
- $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$
- $\vec{p} = \hbar\vec{k}$
- $|\psi_{\vec{k}}\rangle = \mathcal{N} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$
- $H = \frac{p^2}{2m} + V(x, p)$
- $H\,\psi_E(\ldots) = E\,\psi_E(\ldots)$
- $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$

- Caixa:
- $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_x}} \sin\left(n\pi\frac{x}{l_x}\right)$
- $E_n = n^2 \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml_x^2} \quad n = 1, \ldots$
- Osc. Har. $V(x) = c\,x^2/2$
- $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
- $h_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_1(x) = \frac{2x/l}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_2(x) = \frac{2(x/l)^2 - 1}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_3(x) = \frac{2(x/l)^3 - 3x/l}{(9\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $E_n = \frac{1+2n}{2}\hbar\omega \quad n = 0, \ldots$

- $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$
- $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$; $L_\pm = L_x \pm iL_y$
- $L_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m \quad m = -l \ldots l$
- $L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$
- $L_\pm Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m\pm1)}\hbar Y_l^{m\pm1}$
- $Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
- $rY_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z$
- $rY_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x \pm iy)$
- $r^2 Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2z^2 - x^2 - y^2)$
- $r^2 Y_2^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{5}{8\pi}} z(x \pm iy)$
- $r^2 Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,(x \pm iy)^2$

- $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$
  $y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$
  $z = r\cos(\theta)$
- $V(r) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r}$
- $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi)$
- $E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2 n^2} = -\frac{13.6eV}{n^2}$
- $R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$
- $R_{20} = \frac{2 - r/a_0}{2\sqrt{2a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$
- $R_{21} = \frac{r/a_0}{2\sqrt{6a_0^3}} e^{-\frac{r}{2a_0}}$
- $V_Y = -C_Y \frac{e^{-\frac{m_B c^2}{\hbar c} r}}{r}$ Yukawa
- $\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\,\langle [H, A] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle$
- $a^+\,|i\rangle = \sqrt{i+1}\,|i+1\rangle$

- $\hbar = 1.054571 \times 10^{-34}$ J.s
- $\hbar = 6.58120\ldots \times 10^{-16}$ eV.s
- $m_e = 9.109383\ldots \times 10^{-31}$ kg
- $c = 2.99792 \times 10^8$ m/s
- 1 eV$\approx 1.6 \times 10^{-19}$ J
- $m_e c^2 \approx 511 \times 10^3$ eV
- $e = 1.60217\ldots \times 10^{-19} C$

- $m_p c^2 = 938 \times 10^6$ eV
- $\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12}$ C$^2$/Jm
- $\hbar c = 197.327$ eV·nm
- $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\hbar c}{137.036}$
- $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 0.0529$ nm
- Å $= 10^{-10}$m ; Fm $= 10^{-15}$m
- $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = |a|\sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{a^3}{2}\sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty r^n e^{-\frac{r}{a}}\, dr = n!a^{n+1} \quad a > 0$
- 1 eV. nm = 1 MeV. Fm
- $E_\gamma = \hbar\omega$ , $\omega = 2\pi f$ e $c = \lambda f$

# Problemas: Série - 5

1. Revisão: Suponha que lançamos uma moeda ao ar um grande número de vezes e considere uma variável aleatória $M$ com dois estados com valores caras - "1" e coroas - "2".
   a) Se a moeda for equilibrada, qual a distribuição de probabilidades, o valor médio e a variância e o desvio padrão de $M$?
   b) Se a massa do lado "1" for muito superior de modo a que a moeda caia sempre com a "cara" para baixo, qual a distribuição de probabilidades, o valor médio e a variância de $M$?

2. O estado $2p_x$ do átomo de hidrogénio é definido por,

$$\psi_{2p_x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\psi_{211} + \psi_{21-1} \right)$$

   em termos dos estados $\psi_{nlm}$. Calcule a probabilidade de cada um dos estados próprios de $H$, de $\vec{L}^2$ e de $L_z$. Quais os valores de médios e os desvios padrão da energia $E$, de $\vec{L}^2$ e de $L_z$para este estado?

3. estado $2p_x$ do átomo de hidrogénio é definido por,

$$\psi_{2p_x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\psi_{211} + \psi_{21-1} \right)$$

   em termos dos estados $\psi_{nlm}$. Calcule os valores de médios e os desvios padrão da energia $H$,de $\vec{L}^2$ e de $L_z$para este estado a partir dos valores próprios e produtos internos ?

4. Para o hamiltoneano do átomo de hidrogénio os operadores $H, \vec{L}^2, L_z$ comutam. Verifique contudo que o estado $\psi_{2p_x}$ não é um estado próprio simultaneamente dos 3 operadores.

5. Utilizando a definição $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, calcule os comutadores $[p_x, p_y]$ , $[x^2, p_x]$ e $[x^2, p_y]$. Calcule os mesmos comutadores utilizando as expressões,

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \qquad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

6. Dado um sistema de uma partícula com uma função de onda $\psi(\vec{r}) = R(r)\, Y_1^{+1}(\theta, \phi)$, determine os valores médios dos operadores $\vec{L}^2, L_x^2, L_y^2, L_z^2, L_x, L_y, L_z$. Sugestão: utilize os elementos de matriz de $L_\pm$ no formulário.

7. A função de onda que descreve o estado de um electrão tem a forma $\psi(x) = \frac{1}{(\pi a^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ com $a$ constante positiva real. Qual o valor médio da posição $x$ e o valor médio da energia cinética, $E$, para este estado, expresso em função de $a, \hbar$ e $m_e$? .

8. Sabendo que $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$, diga qual a expressão da relação de Heisenberg para um estado próprio do momento angular com l=4, m=3.

9. Sejam $\psi_1$ e $\psi_2$ duas funções de onda de norma 1 e produto interno $S = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$ real e positivo. Considere que os produtos internos envolvendo o Hamiltoneano são: $H_1 = \langle\psi_1|H\psi_1\rangle$, $H_2 = \langle\psi_2|H\psi_2\rangle$ e $H_{12} = \langle\psi_1|H\psi_2\rangle$ que assumem todos valores reais. Calcule para a função

$$\psi = \cos\alpha\, \psi_1 + \sin\alpha\, \psi_2$$

   o valor médio

$$\langle H\rangle = \frac{\langle\psi|H\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

   em função de $\alpha, S, H_1, H_2, H_{12}$ . Para o caso de $H_1 = H_2$ quais o valores de $\alpha$ onde acontece o mínimo ou máximo do valor médio. (Sugestão: simplifique a expressão utilizando $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ )