

Formulário

<ul style="list-style-type: none"> • $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ • $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ • $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$ • Função de onda $\psi(x, y, x; t)$ • $\langle \phi \psi \rangle = \int \phi^* \psi dx dy dz$ • $\ \psi\ ^2 = \int \psi^* \psi dx dy dz$ • Hermit. $\langle \phi A\psi \rangle = \langle A\phi \psi \rangle$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $A \psi_\lambda\rangle = \lambda \psi_\lambda\rangle$ • $\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda \psi_\lambda\rangle$ • $\rho(\lambda) = \langle \psi_\lambda \psi \rangle ^2 / \langle \psi \psi \rangle$ • $\langle A \rangle = \int \psi(x)^* A \psi(x) dx$ • $\sigma_A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$ • $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$ • $\sigma_A \sigma_B \geq \frac{ \langle [A, B] \rangle }{2}$ • $\sigma_E \sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$ 	<ul style="list-style-type: none"> • De Broglie $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$ • $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ • $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ • $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ • $\psi_{\vec{k}}\rangle = \mathcal{N} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ • $H = \frac{p^2}{2m} + V(x, p)$ • $H \psi_E(\dots) = E \psi_E(\dots)$ • $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$
<ul style="list-style-type: none"> • Caixa: • $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_x}} \sin\left(n\pi \frac{x}{l_x}\right)$ • $E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml_x^2} \quad n = 1, \dots$ • Osc. Har. $V(x) = cx^2/2$ • $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ • $h_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ • $h_1(x) = \frac{2x/l}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ • $h_2(x) = \frac{2(x/l)^2 - 1}{(4\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ • $h_3(x) = \frac{2(x/l)^3 - 3x/l}{(9\pi l^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$ • $E_n = \frac{1+2n}{2} \hbar\omega \quad n = 0, \dots$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\vec{L} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$ • $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}; L_\pm = L_x \pm iL_y$ • $L_z Y_l^m = m\hbar Y_l^m \quad m = -l \dots l$ • $L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$ • $L_\pm Y_l^m = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \hbar Y_l^{m \pm 1}$ • $Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ • $rY_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z$ • $rY_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (x \pm iy)$ • $r^2 Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2z^2 - x^2 - y^2)$ • $r^2 Y_2^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{5}{8\pi}} z(x \pm iy)$ • $r^2 Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (x \pm iy)^2$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$ $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$ $z = r \cos(\theta)$ • $V(r) = -\frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r}$ • $\psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$ • $E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2 n^2} = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2}$ • $R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$ • $R_{20} = \frac{2-r/a_0}{2\sqrt{2}a_0^3} e^{-\frac{r}{2a_0}}$ • $R_{21} = \frac{r/a_0}{2\sqrt{6}a_0^3} e^{-\frac{r}{2a_0}}$ • $V_Y = -C_Y \frac{e^{-\frac{m_B e^2 r}{\hbar c}}}{r}$ Yukawa • $\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle$ • $a^+ i\rangle = \sqrt{i+1} i+1\rangle$
<ul style="list-style-type: none"> • $\hbar = 1.054571 \times 10^{-34}$ J.s • $\hbar = 6.58120 \dots \times 10^{-16}$ eV.s • $m_e = 9.109383 \dots \times 10^{-31}$ kg • $c = 2.99792 \times 10^8$ m/s • $1 \text{ eV} \approx 1.6 \times 10^{-19}$ J • $m_e c^2 \approx 511 \times 10^3$ eV • $e = 1.60217 \dots \times 10^{-19}$ C 	<ul style="list-style-type: none"> • $m_p c^2 = 938 \times 10^6$ eV • $\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12}$ C²/Jm • $\hbar c = 197.327$ eV.nm • $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\hbar c}{137.036}$ • $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 0.052918$ nm • $\text{Å} = 10^{-10}$ m ; Fm = 10^{-15} m • $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K 	<ul style="list-style-type: none"> • $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = a \sqrt{\pi}$ • $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = 0$ • $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \frac{a^3}{2} \sqrt{\pi}$ • $\int_0^\infty r^n e^{-\frac{r}{a}} dr = n! a^{n+1} \quad a > 0$ • $1 \text{ eV} \cdot \text{nm} = 1 \text{ MeV} \cdot \text{Fm}$ • $E_\gamma = \hbar\omega, \omega = 2\pi f \text{ e } c = \lambda f$

Problemas: Série - 4

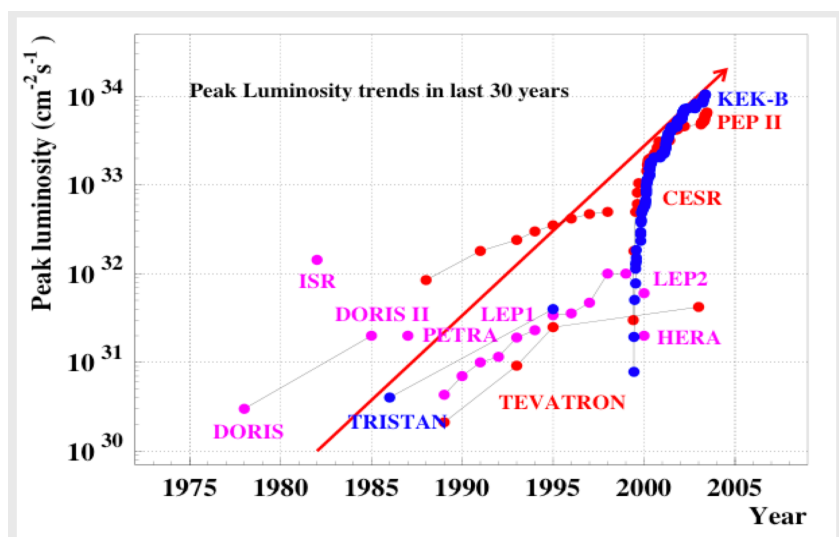
1. A secção eficaz diferencial de Coulomb para a dispersão de um electrão por um núcleo de número atómico Z é dada pela formula de Rutherford,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

que é a mesma, quer seja calculada em mecânica clássica quer em mecânica quântica. Quais os valores desta secção eficaz em $\text{mb} = 0.1 \text{ fm}^2 = 10^{-13} \text{ nm}^2$ (mili-barn) para a dispersão de um feixe de electrões com energia de 1 keV por um alvo de hidrogénio para os ângulos de $\theta = 180, 90, 60, 30$ graus. Compare com [<https://srdata.nist.gov/SRD64/Elastic/SelInitEnergy/1>] (protão com tamanho finito) tendo em consideração que (formatário) $1 \text{ mb} = 10^{-13} \text{ nm}^2 = 3.571 \times 10^{-11} a_0^2$. Observe o gráfico da referência em escala linear e logarítmica.

2. Utilizando os valores da alínea anterior, considere que apenas existe um núcleo no alvo e que a luminosidade do feixe de electrões é de $\mathcal{L} = 10^{30} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Quantos electrões por segundo seriam observados num detector colocado a 1m do alvo com uma área eficaz de 10 cm^2 disposta perpendicularmente ao feixe emergente e com um ângulo de dispersão de 30 graus. considerando que num intervalo de tempo,

$$dN = \frac{dN_{\text{inci}}}{dA_{\text{inci}}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$



3. Resolva, para $l = 0$, a equação radial para $F_l(r) = rR_l(r)$,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right\} F_{nl}(r) = E_{nl} F_{nl}(r)$$

onde μ é a massa reduzida do sistema e o potencial é dado por,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Assuma que a solução é contínua e tem derivada contínua em $r = a$ e que $R_l(r)$ é finita quando $r \rightarrow 0$.

Calcule o desvio de fase δ_l comparando a solução $R(r)$ com a expressão ($k = p_\infty/\hbar$),

$$R_{El}(r)_{r \rightarrow \infty} \sim \dots \frac{e^{i\delta_l}}{r} \left[e^{-i(kr+\delta_l)} + (-1)^{l+1} e^{i(kr+\delta_l)} \right]$$

4. Numa experiência de colisão, o potencial é esfericamente simétrico e, a baixa energia, apenas as componentes de $l = 0$ e $l = 1$ são não nulas. Considerando a expressão para a secção eficaz diferencial,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |C_f(\theta)/C_i|^2 = \frac{\hbar^2}{p_\infty^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{\infty} i^{l-l_1} f_l^* f_{l_1} Y_l^0(\theta) Y_{l_1}^0(\theta)$$

mostre que a secção eficaz se pode escrever como $\frac{d\sigma}{d\Omega} = a + b \cos \theta + c \cos^2 \theta$ e calcule o valor das secção eficaz total em função de a, b, c .

5. Calcule pela aproximação de Born,

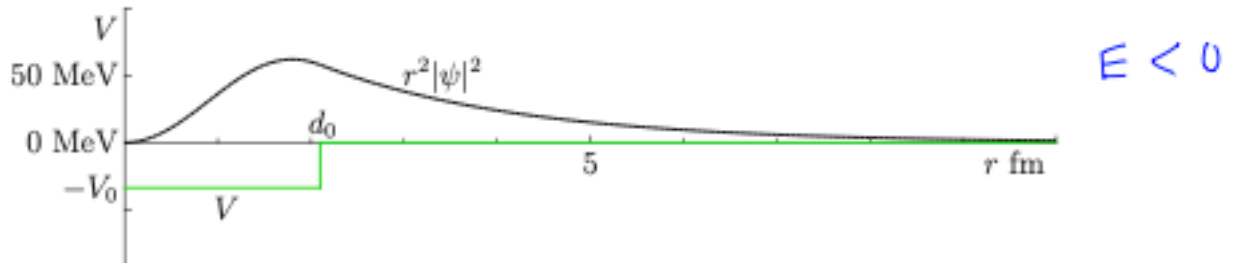
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 = \left| \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int_{\vec{r}'} e^{-i(\vec{k}_f - \vec{k}_i) \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}') d^3\vec{r}' \right|^2$$

para o potencial de Yukawa

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r},$$

onde V_0 e α são constantes.

6. À semelhança da pergunta 3, resolva o estado $l = 0$ do deuteron para o potencial a verde na figura,



para a energia negativa, E , com $F_0(r) = rR_0(r)$,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + V(r) \right\} F_0(r) = EF_0(r)$$

7. No estado "s" ($l = 0$) do deuteron, assumindo um potencial central em forma de poço com $V_c(r) = 0$ para $r > d_0$, a forma da função de onda para esta região é dada por uma das duas opções,

$$(1) \psi(r) = A \frac{e^{\pm ik_E r}}{r} \text{ ou } (2) \psi(r) = A \frac{e^{-k_E r}}{r}.$$

Dado que, para $l = 0$, a equação de Schrödinger na coordenada r é

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + V(r) \right\} R(r) = ER(r),$$

para uma energia de $E = -2.225$ MeV, e a massa reduzida μ para o sistema $m_N = 939.6$ MeV/ c^2 e $m_P = 938.3$ MeV/ c^2 , escreva o valor da massa reduzida, a opção válida e o valor de k_E .

8. No deuteron, o potencial de interação neutrão-protão tem um core repulsivo com raio de cerca de 0.5 Fm. Identifique o raio do core com a distância r onde a exponencial do potencial de Yukawa (V_Y no formulário) se reduz a $1/e$. Qual seria a massa do bosão de interação m_B e o sinal da constante C_Y que corresponderia ao core repulsivo?
9. Considere duas partículas de spin $1/2$ que orbitam uma em torno da outra, num estado ligado de paridade 1 e momento angular total $j = 2$. A paridade do harmónico esférico Y_l^m é $(-1)^l$. Na soma de dois momentos angulares/spins, $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ verifica-se $m = m_1 + m_2$ e $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$. Neste caso, quais as combinações de momento angular l, m de Y_l^m e os estados de soma dos spins $|s, m_s\rangle$ que podem fazer parte da função de onda do estado ligado?

10. Considere duas partículas de spin $1/2$ que orbitam uma em torno da outra, num estado ligado de paridade 1 e momento angular total $j = 1$. A paridade do harmônico esférico Y_l^m é $(-1)^l$ e na soma de dois momentos angulares/spins $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$, verifica-se $m = m_1 + m_2$ e $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$. Neste caso, quais as combinações de momento angular Y_l^m e os estados de soma dos spins $|s, m_s\rangle$ podem fazer parte da função de onda do estado ligado?