Formulário

- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- Função de onda $\psi(x, y, x; t)$
- $\langle\phi\,|\,\psi\rangle = \int \phi^*\psi\,dx\,dy\,dz$
- $||\psi||^2 = \int \psi^*\psi\,dx\,dy\,dz$
- Hermit. $\langle\phi\,|\,A\psi\rangle = \langle A\phi\,|\,\psi\rangle$

- $A\,|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,|\psi_\lambda\rangle$
- $|\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda\,|\psi_\lambda\rangle$
- $\rho(\lambda) = |\,\langle\psi_\lambda\,|\,\psi\rangle\,|^2 / \langle\psi\,|\,\psi\rangle$
- $\langle A\rangle = \int \psi(x)^* A\psi(x)\,dx$
- $\sigma_A = \sqrt{\langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle}$
- $\sigma_x\,\sigma_p \geq \hbar/2$
- $\sigma_A\,\sigma_B \geq \frac{|\langle[A,B]\rangle|}{2}$
- $\sigma_E\,\sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$

- De Broglie $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$
- $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
- $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$
- $\vec{p} = \hbar\vec{k}$
- $|\psi_{\vec{k}}\rangle = \mathcal{N}e^{-i\vec{k}\vec{r}}$
- $H = \frac{p^2}{2m} + V(x,p)$
- $H\,\psi_E(\ldots) = E\,\psi_E(\ldots)$
- $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$

- Caixa:
- $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_x}}\sin\left(n\pi\frac{x}{l_x}\right)$
- $E_n = n^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml_x^2} \qquad n = 1,\ldots$
- Osc. Har. $V(x) = c\,x^2/2$
- $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
- $h_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_1(x) = \frac{2x/l}{(4\pi l^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_2(x) = \frac{2(x/l)^2-1}{(4\pi l^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_3(x) = \frac{2(x/l)^3-3x/l}{(9\pi l^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $E_n = \frac{1+2n}{2}\hbar\omega \qquad n = 0,\ldots$

- $\vec{L} = -i\hbar\vec{r}\times\vec{\nabla}$
- $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$; $L_\pm = L_x \pm iL_y$
- $L_zY_l^m = m\hbar Y_l^m \quad m = -l\ldots l$
- $L^2Y_l^m = l(l+1)\hbar^2Y_l^m$
- $L_\pm Y_l^m = \sqrt{l(l+1)-m(m\pm1)}\hbar Y_l^{m\pm1}$
- $Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
- $rY_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z$
- $rY_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x\pm iy)$
- $r^2Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2z^2-x^2-y^2)$
- $r^2Y_2^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{5}{8\pi}}z(x\pm iy)$
- $r^2Y_2^{\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(x\pm iy)^2$

- $x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$
$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$
$z = r\cos(\theta)$
- $V(r) = -\frac{e^2Z}{4\pi\epsilon_0 r}$
- $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$
- $E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_ea_0^2n^2} = -\frac{13.6eV}{n^2}$
- $R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}}e^{-\frac{r}{a_0}}$
- $R_{20} = \frac{2-r/a_0}{2\sqrt{2a_0^3}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$
- $R_{21} = \frac{r/a_0}{2\sqrt{6a_0^3}}e^{-\frac{r}{2a_0}}$
- $V_Y = -C_Y\frac{e^{-\frac{m_Bc^2}{\hbar c}r}}{r}$ Yukawa
- $\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[H,A]\rangle + \langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle$
- $a^+\,|i\rangle = \sqrt{i+1}\,|i+1\rangle$

- $\hbar = 1.054571\times10^{-34}$ J.s
- $\hbar = 6.58120\ldots\times10^{-16}$ eV.s
- $m_e = 9.109383\ldots\times10^{-31}$ kg
- $c = 2.99792\times10^8$ m/s
- 1 eV$\approx 1.6\times10^{-19}$ J
- $m_ec^2 \approx 511\times10^3$ eV
- $e = 1.60217\ldots\times10^{-19}C$

- $m_pc^2 = 938\times10^6$ eV
- $\epsilon_0 = 8.8541\times10^{-12}$ C^2/Jm
- $\hbar c = 197.327$ eV·nm
- $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\hbar c}{137.036}$
- $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_ee^2} = 0.0529$ nm
- Å $= 10^{-10}$m ; Fm $= 10^{-15}$m
- $k_B = 8.617\times10^{-5}$ eV/K

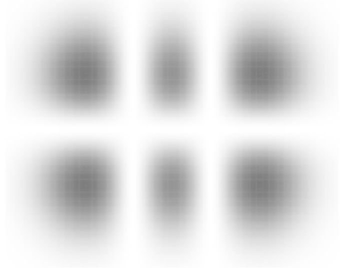
- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = |a|\sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{a^3}{2}\sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty r^ne^{-\frac{r}{a}}\,dr = n!a^{n+1} \quad a>0$
- 1 eV. nm = 1 MeV. Fm
- $E_\gamma = \hbar\omega$, $\omega = 2\pi f$ e $c = \lambda f$

Problemas: Série - 2

1. Para um oscilador harmónico a 3 dimensões com $k_x = k_y = k_z = k$, escreva a energia do estado fundamental e a sua função de onda completa. Mostre que a função de onda tem simetria esférica e que é máxima na origem e decresce para 0 para grandes distâncias da origem.

2. Para um oscilador harmónico a 3 dimensões com $k_x = k_y = k_z = k$, escreva a expressão da energia do estado ψ_{100} e a função de onda completa desse estado.

3. Escreva explicitamente a expressão da função de onda ψ_{213} e confirme que a densidade de probabilidade tem a forma da figura em baixo, quando está a observar ao longo do eixo zz , o eixo dos xx é horizontal e o eixo dos yy vertical.



4. Verifique que as combinações lineares de funções próprias do oscilador harmónico $(\psi_{100} + \psi_{010})/\sqrt{2}$ e $(\psi_{010} - \psi_{100})/\sqrt{2}$ são as funções próprias ψ_{100} e ψ_{010} num sistema de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, z)$ rodado de 45 graus, no sentido anti-horário,, em torno do eixo dos zz.

5. Se os valores próprios do momento angular projectado numa direção são múltiplos de $\hbar$, então $\hbar = 1.054571 \times 10^{-34}$ $J.s$ deve ter unidades de momento angular. Verifique.

6. Qual é o número quântico magnético, m_l, de uma partícula macroscópica de 1 kg num movimento circular e uniforme em torno do eixo dos zz com raio 1 m e velocidade 1 m/s?

7. Analisando as funções próprias de L_z, é razoável caracterizar o estado macroscópico de uma partícula por um único estado próprio desta partícula? Em particular qual a sua posição?

8. Assumindo que a função de onda de um estado com momento angular $(\vec{L}^2, L_z)$ bem definidos é dada por $\Psi = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$, onde $R(r)$ é uma função arbitrária de r, explicite qual a condição de normalização da função $R(r)$ correspondente a $\int_V \Psi^* \Psi \, dV = 1$.

9. Podemos afirmar que se uma partícula está num estado a que corresponde uma densidade de probabilidade de presença apenas dependente da distância à origem (esfericamente simétrica), então terá $l = 0, m_l = 0$?

10. Qual o valor mínimo da diferença $\vec{L}^2 - L_Z^2$ para um dado valor de l?

11. Para o primeiro estado excitado ($n = 1$) de um oscilador harmónico a uma dimensão, calcule o produto de desvios padrão $\sigma_x \sigma_{p_x}$. Assuma o teorema do virial, ou seja que, num oscilador harmónico, os valores médios da energia cinética e da energia potencial são iguais e também que os valores médios $< x >$ e $< p_x >$ são nulos.

12. Um oscilador harmónico unidimensional com $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ está no seu primeiro estado excitado. Para que valores de x a densidade de probabilidade de presença é máxima e qual esse valor máximo?

$$x = \pm l$$
$$\rho = 0.415/l$$

13. Considerando a definição dos operadores $L_\pm = L_x \pm iL_y$ escreva as matrizes dos operadores L_z, L_y para a base de estados de spin 1, $Y_1^1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_1^0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_1^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

14. O Hamiltoneano quântico para o movimento de rotação de uma molécula diatómica de momento de inércia segundo a ligação, I, é,

$$H = \frac{1}{2I}\left(L_x^2 + L_y^2\right) + \frac{1}{I}L_z^2$$

Assumindo que os vectores próprios deste Hamiltoneano são os harmónicos esféricos, indique qual o espectro de energia?

15. Qual o resultado da aplicação do operador de projecção de momento angular L_z às funções 1) $F_1(\vec{r}) = r$ e 2) $F_2(\vec{r}) = \frac{x}{r}$?

16. Considere um oscilador harmónico unidimensional com constante elástica $m\omega^2$ no estado fundamental. Assuma que a energia quântica do estado podia ser interpretada como energia clássica e diga qual seria o x_{max} desse movimento clássico. Qual a razão das densidades de probabilidade de presença em x_{max} e em 0 ?

17. Por comparação com a tabela de harmónicos esféricos e as expressões das coordenadas esféricas no formulário diga se a função $\psi = A\sin(\theta)e^{i\varphi}$ é uma função própria do momento angular e, se sim, quais os valores próprios de $\vec{L}^2$ e L_z respectivamente.