Formulário

- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- Função de onda $\psi(x, y, x; t)$
- $\langle\phi\,|\,\psi\rangle = \int \phi^*\psi\, dx\, dy\, dz$
- $||\psi||^2 = \int \psi^*\psi\, dx\, dy\, dz$
- Hermit. $\langle\phi\,|\,A\psi\rangle = \langle A\phi\,|\,\psi\rangle$

- $A\,|\psi_\lambda\rangle = \lambda\,|\psi_\lambda\rangle$
- $|\psi\rangle = \sum_\lambda c_\lambda\,|\psi_\lambda\rangle$
- $\rho(\lambda) = |\,\langle\psi_\lambda\,|\,\psi\rangle\,|^2 / \langle\psi\,|\,\psi\rangle$
- $\langle A\rangle = \int \psi(x)^* A\psi(x)\, dx$
- $\sigma_A = \sqrt{\langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle}$
- $\sigma_x\,\sigma_p \geq \hbar/2$
- $\sigma_A\,\sigma_B \geq \frac{|\langle[A,B]\rangle|}{2}$
- $\sigma_E\,\sigma_t \geq \frac{\hbar}{2}$

- De Broglie $\lambda_B = 2\pi\hbar/p$
- $p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$
- $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$
- $\vec{p} = \hbar\vec{k}$
- $\left|\psi_{\vec{k}}\right\rangle = \mathcal{N}e^{-i\vec{k}\vec{r}}$
- $H = \frac{p^2}{2m} + V(x, p)$
- $H\,\psi_E(\ldots) = E\,\psi_E(\ldots)$
- $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$

- Caixa:
- $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l_x}}\sin\left(n\pi\frac{x}{l_x}\right)$
- $E_n = n^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml_x^2} \qquad n = 1, \ldots$
- Osc. Har. $V(x) = c\,x^2/2$
- $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$
- $h_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_1(x) = \frac{2x/l}{(4\pi l^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_2(x) = \frac{2(x/l)^2-1}{(4\pi l^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $h_3(x) = \frac{2(x/l)^3-3x/l}{(9\pi l^2)^{1/4}}e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$
- $E_n = \frac{1+2n}{2}\hbar\omega \qquad n = 0, \ldots$

- $\hbar = 1.054571 \times 10^{-34}$ J.s
- $\hbar = 6.58120\ldots \times 10^{-16}$ eV.s
- $m_e = 9.109383\ldots \times 10^{-31}$ kg
- $c = 2.99792 \times 10^8$ m/s
- 1 eV$\approx 1.6 \times 10^{-19}$ J
- $m_ec^2 \approx 511 \times 10^3$ eV
- $e = 1.60217\ldots \times 10^{-19}C$

- $m_pc^2 = 938 \times 10^6$ eV
- $\epsilon_0 = 8.8541 \times 10^{-12}$ $\mathrm{C^2/Jm}$
- $\hbar c = 197.327$ eV·nm
- $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\hbar c}{137.036}$
- $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 0.0529$ nm
- Å $= 10^{-10}$m ; Fm $= 10^{-15}$m
- $k_B = 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K

- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = |a|\sqrt{\pi}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1}e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx = \frac{a^3}{2}\sqrt{\pi}$
- $\int_0^\infty r^n e^{-\frac{r}{a}}\, dr = n!a^{n+1} \;\; a > 0$
- 1 eV. nm = 1 MeV. Fm
- $E_\gamma = \hbar\omega$, $\omega = 2\pi f$ e $c = \lambda f$

Problemas: Série - 1

1. Considere uma função, vetor próprio do operador momento,

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

com valor próprio $p = \hbar k$ e mostre que esta função se repete cada vez que a coordenada x avança para $x + \lambda$. Relacione o momento p e o vetor de onda k com o comprimento λ, chamado de comprimento de onda de de Broglie.

2. Determine a energia e o comprimento de onda de de Broglie para um eletrão que foi acelerado por uma diferença de potencial de (i) 100 V, (ii) 200 V.

3. Calcule comprimento de onda de de Broglie de um eletrão com energia cinética de 1000 eV. Compare o resultado com o comprimento de onda de raios X com a mesma energia.

4. Os electrões num microscópio electrónico são acelerados a partir do repouso através de uma diferença de potencial V_0 de tal modo que o seu comprimento de onda de de Broglie é de 0.04 nm. Qual o valor de V_0?

5. Assuma que conseguimos medir o comprimento de onda de De Broglie, λ_B, para um feixe de electrões livres com energia cinética de 10^6 eV. Qual o momento do electrão em eV/c? Qual o valor do valor de λ_B ?

6. Qual o comprimento de onda de de Broglie para um protão que foi acelerado por uma diferença de potencial de 2V? Considere a expressão não relativista para a energia cinética. $\lambda =$ .... nm

7. Para um feixe de electrões livres com energia cinética de 10^6 eV, assuma que conseguimos medir o comprimento de onda de De Broglie, λ_B, com um desvio padrão com $\frac{\sigma_{\lambda_B}}{\lambda_B} = 10^{-8}$. Qual o desvio padrão do valor do momento, σ_p? (Sugestão: considere a propagação de incertezas numa função $f(x)$ como dada por $\sigma_f = \left|\frac{df}{dx}\right| \sigma_x$). Assumindo a relação de Heisenberg, $\sigma_p \sigma_x \geq \frac{\hbar}{2}$, qual o desvio padrão mínimo com que podemos medir simultaneamente a posição do electrão, segundo o eixo do momento?

8. Qual é a norma da função $\cos^2(x)$ no intervalo $x \in [0, 2\pi]$?

9. Considere os operadores $i\frac{d}{dx}$ e $\frac{d^2}{dx^2}$. Qual/quais destes é/são hermítico(s)?

10. A função de onda $\psi(x) = \mathcal{C}\, e^{ix/l}$ com $l = 10^{-10}$ m é uma função própria do operador de momento linear de uma partícula livre com valor próprio igual a?

11. Assuma o tamanho aproximado do átomo de hidrogénio como $l_x \approx 2 \times 10^{-10}$m na expressão para a energia cinética e verifique qual a energia que obtinha para o estado fundamental. Expresse o resultado final em eV.

12. Quanto daria a energia do estado fundamental para uma partícula de $m = 1$ kg e caixa macroscópica de $l_x = 1$ m?

13. Qual seria o índice n da função própria de energia que corresponderia a $E = 1$ J para $m = 1$ kg e $l_x = 1$ m? Qual a diferença de energia entre estado sucessivos? Seria capaz de os distinguir?

14. Qual o gráfico do estado ψ_6 do poço unidimensional ?

15. Em quantas regiões distintas pode a partícula ser encontrada para o estado ψ_n?

16. Como se pode compreender que, se num poço unidimensional, intuitivamente, a partícula tenha de se deslocar alternadamente na duas direcções resultando dos choques com as extremidades, para o estado ψ_2, a partícula tenha probabilidade 0 de estar no centro do intervalo?

17. Um eletrão está confinado numa caixa de potencial segundo o eixo dos x com largura de $l_x = 2$ nm. A sua energia é de 0.3748 eV. Qual o número quântico n, a densidade de probabilidade $\rho(x_0)$ de este estar presente no ponto com $x_0 = 0.5$ nm ? Assumindo essa densidade como constante na vizinhança de 0.5 nm, qual a probabilidade, em percentagem, de encontrar o eletrão entre $x_0 - 0.5$Å e $x_0 + 0.5$Å ? $n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $\rho(x_0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $P = \ldots\ldots$ %

18. Se um "tubo" quadrado tiver comprimento l_x e dimensões transversais l_y e $l_z$que são um décimo de l_x, quanto maior são E_{y1} e E_{z1} comparadas com E_{x1}? Compare E_{x1} com a energia do estado tri-dimensional E_{111} e comente a validade da aproximação unidimensional.

19. Se um "tubo" quadrado tiver comprimento l_x e dimensões transversais l_y e l_z, para que razão de l_y/l_x a energia E_{121} fica maior do que E_{311}?

20. Represente graficamente as regiões em que é mais provável a partícula se encontrar para o estado ψ_{322}.

21. Considere uma partícula confinada a um poço de potencial infinito ("pipe") 2D de dimensões $l_x = l_y = l$. Qual a expressão da energia quando $n_x = n_y = 2$?

22. A função de onda que descreve o estado de um electrão tem a forma $\psi(x) = \frac{1}{(\pi a^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ com a constante positiva real. Qual o valor médio da posição x e o valor médio da energia cinética, E , para este estado? (Sugestão: Integrais no formulário).

23. Um operador hermítico é definido pela relação envolvendo o produto interno, $\langle\phi|H\psi\rangle = \langle H\phi|\psi\rangle$, para quaisquer $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$. Considerando os operadores hermíticos A, B que não comutam, diga se os seguintes operadores são hermíticos:

    (a) iA
    (b) AB
    (c) $AB + BA$
    (d) $AB - BA$
    (e) $i[A, B]$