Problemas: Série - 0

1. Calcule $(2+3i)^2$ e encontre a suas partes imaginárias e reais.

2. Verifique que o elemento inverso de i é $-i$.

3. Calcule $(2+3i)(2-3i)$ e as suas partes reais e imaginárias. Calcule em geral a parte imaginária de $(a+ib)(a-ib)$.

4. Calcule a amplitude (norma) do número complexo $2+3i$.

5. Mostre que o complexo conjugado de $(2-3i)^2$ é a potência dos complexos conjugados $(2+3i)^2$.

6. Verifique que e^{-2i} é o complexo conjugado de e^{2i} utilizando a formula de Taylor (Euler).

7. utilizando a formula de Moivre $\left\{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\right\}$, mostre que $\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} = cos(\alpha)$.

8. Mostre que e$\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \sin(\alpha)$.

9. Compare graficamente o diagrama do vector a 10 dimensões $\vec{v}$ com componentes $(0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5)$ com o gráfico da função $f(x) = x/2$.

10. Compare graficamente o diagrama do vector a 10 dimensões $\vec{i}$ com componentes $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, com o gráfico da função $f(x) = 1$.

11. Calcule o produto interno dos vectores $\langle\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 2i \\ 3 \end{pmatrix}\rangle$.

12. Calcule a norma do vector $\begin{pmatrix} 1+i \\ 3 \end{pmatrix}$.

13. Calcule o produto interno das funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ no intervalo $0 \le x \le 1$.

14. Mostre que as funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são ortogonais no intervalo $0 \le x \le 2\pi$.

15. Verifique que a função $\sin(x)$ não está normalizada no intervalo $0 \le x \le 2\pi$. Normalize-a nesse intervalo dividindo pela sua norma.

16. Verifique que o mais geral múltiplo de $\sin(x)$ que é normalizada no intervalo $0 \le x \le 2\pi$ é $\frac{e^{i\alpha} sin(x)}{\sqrt{\pi}}$, onde α isto é um numero real arbitrário. Mostre, utilizando a formula de Euler que os seguintes múltiplos de $\sin(x)$ são normalizados: $\frac{sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{-sin(x)}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{isin(x)}{\sqrt{\pi}}$ e $\frac{-isin(x)}{\sqrt{\pi}}$.

17. Mostre que as funções$e^{4i\pi x}$ e $e^{6i\pi x}$ são ortonormais no intervalo $0 \le x \le 1$.

18. Qual o resultado do operador $\frac{d}{dx}$ quando aplicado à função $\sin(x)$?

19. Se o operador $\widehat{x^2}$ quando aplicado a $\sin(x)$ for simplesmente $x^2\sin(x)$, qual é a diferença matemática entre $\widehat{x^2}$ e x^2?

20. Um operador menos trivial é o operador de translação $\mathcal{T}_{\pi/2}$ que translaciona o gráfico de uma função para a esquerda por $\pi/2$: $\mathcal{T}_{\pi/2} f(x) = f(x + \pi/2)$. (O operador de translação está associado ao operador momento.) Mostre que $\mathcal{T}_{\pi/2}$ aplicado a $\sin(x)$ dá $\cos(x)$.

21. O operador de paridade $\prod$ torna $f(x)$ em $f(-x)$. (Está associado a ver um fenómeno por um espelho.) Mostre que $\prod$ deixa $\cos(x)$ inalterado mas torna, $\sin(x)$ em $-\sin(x)$.

22. Mostre que, de um modo mais geral, e^{ikx}, são funções próprias de $\frac{d^2}{dx^2}$, com valores próprios $-k^2$. De facto o quadrado de um operador tem as mesmas funções próprias do operador mas com o quadrado dos valores próprios.

23. Mostre que qualquer função da forma $\sin(kx)$ e qualquer função da forma $\cos(kx)$, onde k é uma constante chamada número de onda, é uma função própria do operador $\frac{d^2}{dx^2}$, embora não seja função própria de $\frac{d}{dx}$.

24. Mostre que $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$, com k uma constante, são funções próprias do operador de paridade $\prod$ que transforma $f(x)$ em $f(-x)$, e diga quais os valores próprios.

25. Uma aplicação linear A é definida por transformar o vector $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ no vector $\vec{r}_2 = 2x\vec{e}_x + 4y\vec{e}_y$. Verifique que $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$ são vectores próprios ortonormais da aplicação com valores próprios respectivamente 2 e 4. Represente a matriz de A na base $\vec{e}_x, \vec{e}_y$.

26. Uma aplicação linear A é definida por transformar o vector $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ no vector $\vec{r}_2 = (x+y)\,\vec{e}_x + (x+y)\,\vec{e}_y$. Verifique que $\cos(45^o)\vec{e}_x + \sin(45^o)\vec{e}_y$ e $\cos(45^o)\vec{e}_x - \sin(45^o)\vec{e}_y$ são vectores próprios ortogonais desta aplicação com valores próprios respectivamente 2 e 0. Nota: $\cos(45^o) = \sin(45^o) = 1/\sqrt{2}$.

27. Mostre que o operador $\hat{2}$ é Hermítico mas o operador $\hat{\imath}$ não é.

28. Mostre em geral que qualquer constante complexa c pode ser posta em evidência do lado direito de um produto interno mas, tem de ser posta em evidencia como conjugada se aparecer no lado esquerdo: $\langle f|cg\rangle = c\,\langle f|g\rangle$ mas $\langle cf|g\rangle = c^*\,\langle f|g\rangle$.Como resultado o número c só é um operador Hermítico se for real: Se c for complexo as duas expressões acima não são iguais.

29. Mostre que um operador como x^2, correspondendo a multiplicar por uma função real, é um operador Hermítico.

30. Mostre que o operador $\frac{d}{dx}$ não é Hermítico mas $i\frac{d}{dx}$ é, assumindo que as funções nos quais actuam são nulas nos extremos do intervalo $a \le x \le b$ em que estão definidas. (Uma condição menos restritiva é que sejam periódicas, isto é, $f(b) = f(a)$)

31. Mostre que se A é um operador Hermítico, então A^2 também o é. Relacione os valores próprios de A e A^2. Como consequência, nas condições da alínea anterior, o operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ também é Hermítico. (Também o operador $\frac{d^2}{dx^2}$ mas este com valores próprios negativos que não se podem escrever como os quadrados dos valores próprios de $i\frac{d}{dx}$.)

32. Um conjunto completo de funções próprias do operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ que são funções periódicas no intervalo $0 \le x \le \pi$, que têm o valor 0 nos limites do intervalo, é formado pelo conjunto infinito de funções,

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi/2}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi/2}}, \frac{\sin(3x)}{\sqrt{\pi/2}}, \frac{\sin(4x)}{\sqrt{\pi/2}}, \ldots$$

Mostre que estas funções são 0 para $x = 0$ e $x = \pi$, são ortonormais e que são funções próprias do operador $-\frac{d^2}{dx^2}$, com os valores próprios reais positivos,

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

Na realidade elas formam um conjunto completo, isto é uma base.

33. Um conjunto completo de funções próprias do operador $i\frac{d}{dx}$ que são funções periódicas no intervalo $0 \le x \le 2\pi$ é o conjunto infinito de funções,

$$\ldots, \frac{e^{-3ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}}, 1, \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{3ix}}{\sqrt{2\pi}}, \ldots$$

Mostre que estas funções são periódicas, ortonormais e que são funções próprias do operador $i\frac{d}{dx}$, com os valores próprios reais,

$$\ldots, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots$$

O facto de serem uma base é mais difícil de provar. Relacione com a transformada discreta de Fourier.

34. Considere a definição da distribuição $\delta(x-a)$ tal que par qualquer função continua $f(x)$, integrável -função de prova-,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) = f(a)$$

Mostre utilizando, se necessário, mudanças de variável no integral que:

(a) $\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x)$

(b) $x\delta(x) = 0$

(c) $f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$

(d) $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$

(e) $\int \delta(x-a)\delta(x-b) = \delta(a-b)$